ЛЕКЦІЯ № 3

Читайте, читайте Ейлера.

П. Лаплас

Варіаційне числення та принцип найменшої дії.

У попередній лекції ми отримали рівняння Лагранжа, виходячи з рівняння Ньютона і принципу віртуальних переміщень. Покажемо, що це рівняння може бути отримано з інших принципів. Новий підхід пов'язаний з іменами Мопертюї (1698-1759), Ейлера (1707-1783), Лагранжа (1736-1813) і Гамільтона (1806-1865) і з «новою математикою» – варіаційним обчисленням.

У теорії функцій для довільної функції $f(x)$ аргументу x можна поставити питання про виділені значеннях аргументу x для заданої функції f. Відповідь відома. З Рис. 3.1 видно, що це-точки екстремумів (минимум $x_{\min}$ та максимум $x_{\max}$) або точка перегибу (седлова точка x_{sad}), в яких функція приймає екстремальні значення, зокрема, мінімальне значення.

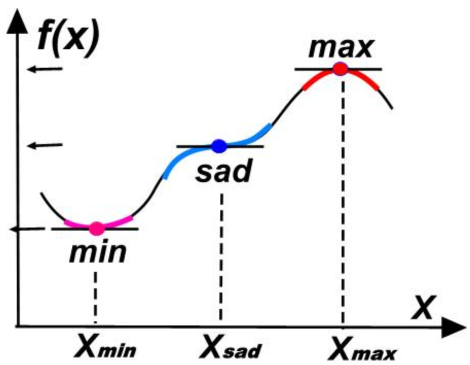


Рис.3.1. Екстремуми функції однієї змінної.

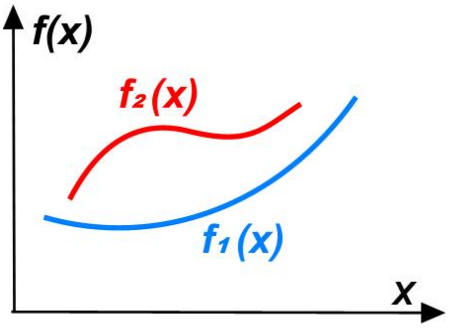
Екстремальність означає, що похідна від функції в цих точках дорівнює нулю:

$$\frac{df}{dx} = 0. \tag{3.1}$$

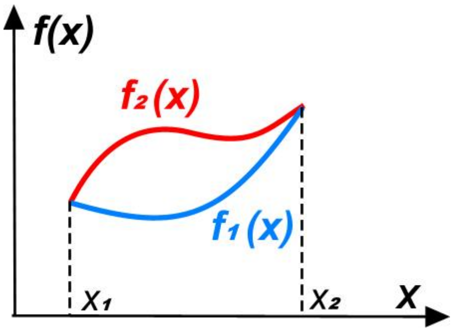
Таким чином, при варіюванні аргументу $\delta x = x - x_{\min}$ в основному наближенні по малій варіації аргументу варіація функції в цих точках також дорівнює нулю

$$\delta f(x) = 0. \tag{3.2}$$

Можна поставити більш загальне питання. На відміну від попереднього випадку розглянемо не різні аргументи однієї і тієї ж функції, а **різні функції**, що є аргументом **функціоналу** (див. Рис. 3.2а).



а)



б)

Рис.3.2. Порівняння різних функцій.

Але як їх можна порівнювати при їх великій різноманітності? Перш за все, будемо їх порівнювати на одному і тому ж інтервалі аргументу $x_1 < x < x_2$ (Рис. 3.2б). І можна порівняти лише деякі інтегральні характеристики цих функцій, тобто значення функціоналу. При цьому можна поставити питання таке ж, як і в попередньому випадку із заданою функцією: для якої з багатьох функцій ця інтегральна характеристика прийме, наприклад, мінімальне значення. Це значення виділить цю функцію серед всіх інших.

Якщо взяти простий функціонал $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$, то відповідь очевидна: мінімум відсутній, оскільки функцію $f(x)$ можна спрямувати до $-\infty$. Якщо взяти не саму функцію $f(x)$, а її квадрат, то відповідь теж очевидна $f(x) \equiv 0$ – задає мінімум. А якщо взяти не квадрат функції, а якусь більш складну інтегральну характеристику від вихідної функції: $F\left(f(x)\right)$? Більш того, можна не обмежувати себе функціоналами, залежними тільки від самої функції, але і включити в нього, наприклад, похідну від функції і сам аргумент тобто можна розглянути функціонал більш загального вигляду $F\left(f(x), df/dx, x\right)$. Таким чином, аналогічно тому, як вище при заданій функції $f(x)$ ми шукали значення аргументу, при якому функція приймає мінімальне значення, тепер ми при заданому вигляді функціоналу шукаємо функцію, для якої $\int_{x_1}^{x_2} F(f, f', x)dx$ має, наприклад, мінімум. Тут і нижче ми ввели позначення $f' = f'_x \equiv df/dx$.

Така задача про екстемум інтеграла

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F\left(f\left(x\right), f_x', x\right) dx \tag{3.3}$$

при заданому вигляді функціоналу $F\left(f\left(x\right), f', x\right)$, тобто знаходженні виду відповідної функції $f\left(x\right)$ була вперше поставлена Бернуллі і вирішена Ейлером і Лагранжем. Ними було отримано диференціальне рівняння для функції $f\left(x\right)$ при заданому $F\left(f\left(x\right), f', x\right)$, розв'язок якого відповідає мінімуму інтеграла (3.3).

Отримаємо це рівняння. Аналогічно тому, як в разі мінімуму функції, який знаходився з умови рівності нулю варіації функції поблизу екстремальної функції, будемо шукати варіацію інтеграла (3.3) поблизу його значення близько якоїсь заданої функції $f\left(x\right)$ (див.Рис.3.3). З малюнка 3.3 б видно, що можна варіювати і похідні по x незалежно. Крім того, додатково будемо вважати, що в кінцевих точках інтервалу функція не варіюється: $\delta f\left(x_1\right) = \delta f\left(x_2\right) = 0$, хоча допускаються зміни похідних по x. Ця умова позначає, що значення функції на кінцях інтервалу вважаються заданими.

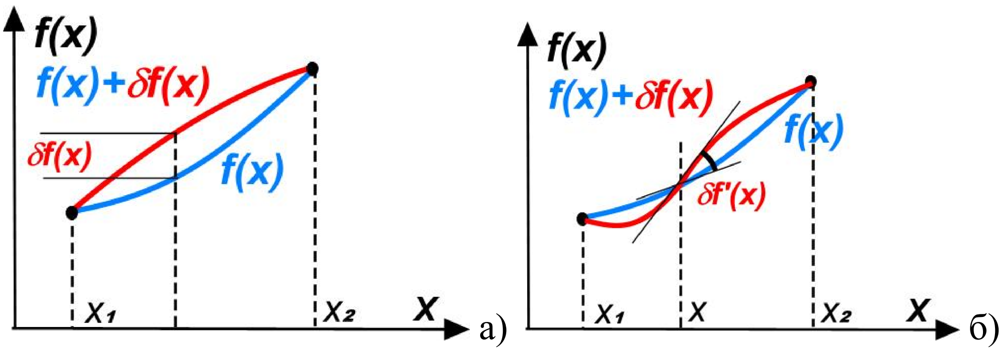


Рис.3.3. Варіювання функцій на скінченному інтервалі.

Обчислимо варіацію інтеграла J при варіації функції f і її похідної f'. Розглянемо значення інтеграла J для якоїсь певної функції $f\left(x\right)$ і його значення $\overline{J}$ для близьких функцій $\overline{f}\left(x\right) = f(x) + \delta f(x)$ і їх похідних:

$$\delta J = \overline{J} - J = \int_{x_1}^{x_2} F\left(\overline{f}\left(x\right), \overline{f}'\left(x\right), x\right) dx - \int_{x_1}^{x_2} F\left(f\left(x\right), f'\left(x\right), x\right) dx . \tag{3.4}$$

Розкладемо під першим інтегралом функцію F в ряд Тейлора по малій варіації $\delta f(x)$:

$$F\left(\bar{f}(x),\bar{f}'(x),x\right)=F\left(f+\delta f,f'+\delta f',x\right)\approx F\left(f,f',x\right)+\frac{\partial F}{\partial f}\delta f+\frac{\partial F}{\partial f'}\delta f'=$$

$$=F\left(f,f',x\right)+\frac{\partial F}{\partial f}\delta f+\frac{\partial F}{\partial f'}\frac{d}{dx}\delta f\,. \qquad (3.5)$$

Таким чином, варіація інтеграла дорівнює

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial f}\delta f+\frac{\partial F}{\partial f'}\frac{d}{dx}\delta f\right)dx\,. \qquad (3.6)$$

Проінтегруємо другий доданок по частинах і отримаємо

$$\delta J=\frac{\partial F}{\partial f'}\delta f\Bigg|_{x=x_1}^{x=x_2}+\int_{x_1}^{x_2}dx\left(\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\right)\delta f\,. \qquad (3.7)$$

За нашим припущенням про фіксованість функції на межах інтервалу, $\delta f\left(x=x_{1,2}\right)=0$, перший доданок в правій частині зникає. Умова екстремальності інтеграла зводиться до рівності нулю його варіації. (Цей факт залишаємо тут без доведення, вкажимо лише, що це аналогічно умові рівності нулю похідної від функції в точці екстремуму). Але оскільки в інтегралі правої частини виразу (3.7) варіація δf самої функції довільна, ми приходимо до рівності нулю виразу в дужках:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F\left(f,f',x\right)}{\partial f'}\right)-\frac{\partial F\left(f,f',x\right)}{\partial f}=0\,. \qquad (3.8)$$

Це і **є рівняння Ейлера-Лагранжа**. При заданій функції $F\left(f,f',x\right)$ розв’язок рівняння Ейлера-Лагранжа відповідає мінімуму (або максимуму чи седловій точці) інтеграла $\int F\left(f,f',x\right)dx$.

Рівняння Ейлера-Лагранжа можна узагальнити на випадок, коли функціонал залежить також від старших похідних від функції f. Для прикладу розглянемо випадок, коли функція $F=F\left(f,f',f''\right)$ містить другу похідну від функції f. При цьому варіація інтеграла набуде вигляду

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial f}\delta f+\frac{\partial F}{\partial f'}\delta f'+\frac{\partial F}{\partial f''}\delta f''\right)dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial f}\delta f+\frac{\partial F}{\partial f'}\frac{d}{dx}\delta f+\frac{\partial F}{\partial f''}\frac{d^2}{dx^2}\delta f\right)dx= \qquad (3.9)$$

$$=\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\delta f-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f''}\right)\delta f+\frac{\partial F}{\partial f'}\delta f'\right)\Bigg|_{x=x_1}^{x=x_2}+\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial f''}\right)\right)\delta f dx\,.$$

Вважаючи тепер, що на краях інтервалу зберігаються не тільки значення функції, але і значення похідних, отримуємо з умови екстремальності інтеграла і довільності варіації функції рівняння:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial f''}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right)+\frac{\partial F}{\partial f}=0\,. \tag{3.10}$$

Неважко далі узагальнити рівняння при залежності функціоналу від довільних похідних функції f.

Повернемося до рівняння (3.8) і порівняємо його з отриманим в попередній лекції рівнянням Лагранжа в механіці:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q}=0\,. \tag{3.11}$$

Видно їх однакову структуру. Тільки роль аргументу x тепер грає час t, а роль функції f грають узагальнені координати $q_i(t)$. Чи пов'язаний рух матеріальної точки з екстремаллю якогось функціоналу? Дійсно, як було запропоновано Гамільтоном, рух механічної системи підпорядковується ***принципу мінімальності дії***, згідно з яким при такому русі інтеграл

$$S=\int\limits_{t_1}^{t_2}L\left(q_i(t),\dot{q}_i(t),t\right)dt \tag{3.12}$$

з деякою функцією $L\left(q_{i,}\dot{q}_i,t\right)$ приймає мінімальне значення. Як ми очікуємо, функція збігається з функцією Лагранжа, а сам інтеграл називається ***дією***. Саме поняття дії було введено Мопертюї в дещо іншому вигляді. Він сформулював принцип: "кількість дії, необхідна для того, щоб зробити деяку зміну в природі, є найменшим можливим. Рух тварин, зростання рослин, обертання зірок є тільки його наслідками". Під дією він розумів величину mvl, де m – маса, v – швидкість і l – шлях пройдений тілом. Оскільки при русі швидкість змінюється, то в цьому виражені треба вважати, що $v=v(t)$ і на кожній ділянці траєкторії $dl=vdt$. Таким чином, ця величина представима у вигляді $\int mv^2dt=\int 2Tdt$.

Хоча з попереднього зрозуміло, що справжня дія представлена у вигляді інтеграла $\int (T-U)dt$, так звана ***укорочена дія*** $\int Tdt$, що введена Мопертюї виявилась теж важливою в механіці. Наприкінці першого розділу, ми порівняємо різні підходи, зокремо повернемось до принципу Мопертюї. А зараз повторимо наведені вище обчислення і покажемо, що принцип мінімальності дії приводить нас до рівнянь Лагранжа. Малюнок 3.3 прийме тепер вид, зображений на Рис.3.4.

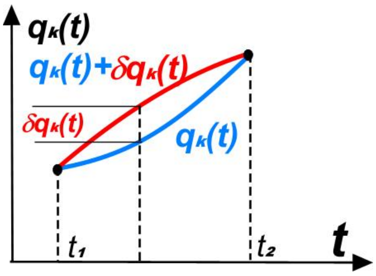


Рис.3.4. Варіації узагальнених координат в процесі динаміки.

Узагальнимо попередні міркування на випадок довільного числа ступенів вільності. Проварюємо дію (3.12). Оскільки варіації всіх узагальнених координат можна проводити незалежно, то загальна варіація дії дорівнює

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_i(t), \dot{q}_i(t), t\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = \tag{3.13}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right) dt = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Bigg|_{t_1}^{t_2} + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt\,.$$

Прирівнюючи до нуля варіацію дії, отримуємо рівняння Лагранжа (3.11). Рівняння Лагранжа і рівняння Ньютона описують рух, З точки зору рішення диференціальних рівнянь, як локальний в часі процес. Принцип мінімальності дії (принцип Гамільтона) – інтегральний принцип, що розглядає рух, як ціле. Його можна розглядати як початковий принцип із заданим Лагранжіаном.

З принципу найменшої дії випливає, що функція Лагранжа визначена тільки з точністю до додавання до неї повної похідної від довільної функції. Дійсно, якщо розглянути функцію Лагранжа виду $\tilde{L} = L + dQ(q_i, \dot{q}_i, t)/dt$, то при підстановці її в дію ми отримаємо:

$$\tilde{S}=\int_{t_1}^{t_2}\tilde{L}dt=\int_{t_1}^{t_2}Ldt+Q\left(t=t_2\right)-Q\left(t=t_1\right)=S+const\,. \tag{3.14}$$

При варіюванні дії константа зникає, і рівняння Лагранжа не змінюються.

Зручність лагранжевого підходу у тому, що рівняння Лагранжа не змінюються при зміні системи координат. Доведемо це. Розглянемо перетворення координат

$$q_i=q_i\left(Q_s\right), \tag{3.15}$$

яке називається *точковим перетворенням*. Обчислимо похідні від функції Лагранжа від нових координат і швидкостей. При цьому, врахуємо що $\dot{q}_i=\left(\partial q_i/\partial Q_s\right)\dot{Q}_s$, $\left(\partial\dot{q}_i/\partial Q_k\right)=\left(\partial^2 q_i/\partial Q_k\partial Q_s\right)\dot{Q}_s$, $\left(\partial\dot{q}_i/\partial\dot{Q}_k\right)=\left(\partial q_i/\partial Q_k\right)$. (Як завжди, за повторними індексами передбачається підсумовування).

$$\frac{\partial L}{\partial Q_s}=\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_s}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial Q_s}=\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_s}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_s\partial Q_k}\dot{Q}_k\,, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}_s}=\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial\dot{Q}_s}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial\dot{Q}_s}=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_s}, \tag{3.17}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}_s}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial Q_s}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_s}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial Q_s}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_k\partial Q_s}\right)\dot{Q}_k\,. \tag{3.18}$$

Віднімаючи (3.16) з (3.18) отримуємо:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}_s}-\frac{\partial L}{\partial Q_s}=\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial Q_s}. \tag{3.19}$$

Оскільки з виконання рівняння Лагранжа в старих координатах виразу в дужках правій частині зануляются, то дорівнює нулю і ліва частина, тобто виконується рівняння Лагранжа в нових змінних.

Якщо ми виходимо з принципу найменшої дії, як вихідного принципу, то для опису динаміки матеріальних точок нам необхідно знайти функцію Лагранжа, виходячи з основних принципів механіки. Вони були сформульовані в попередніх лекціях. Зараз ми продемонструємо, як слова в цих принципах перетворюються на формули.

Знайдемо функцію Лагранжа вільної матеріальної точки в інерціальній системі координат. З однорідності простору і часу випливає, що координата $\vec{r}$ матеріальної точки і час t не можуть увійти в рівняння руху, а значить і в функцію Лагранжа. Тому ця функція може залежати лише від швидкості частинки $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$. З ізотропії простору випливає, що функція Лагранжа не може змінитися при повороті системи координат, і тому вона може залежати тільки від модуля швидкості v. Тобто.

$$L = L\left(v^2\right). \tag{3.20}$$

Оскільки лагранжіан не залежить від координати, то $\partial L / \partial \vec{r} = 0$ і з рівняння Лагранжа випливає, що $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0$, і отже, $dL / d\vec{v} = const$. Візьмемо будь яку з компонент цієї рівності, наприклад:

$$\frac{\partial L}{\partial v_x} = \frac{dL}{dv^2}\frac{\partial}{\partial v_x}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = 2\frac{dL}{dv^2}v_x = const\,. \tag{3.21}$$

Отже, $\vec{v} = const$: швидкість вільної частинки в інерційній системі зберігається, що узгоджується з першим законом Ньютона.

Отже, ми показали, що функція Лагранжа вільної матеріальної точки залежить тільки від v^2. Але яка це залежність? Для відповіді звернемося до принципу відносності. Оскільки в різних інерційних системах відліку динаміка повинна відбуватися однаковим чином, то рівняння Лагранжа не повинні змінюватися при переході від однієї системи до іншої. Отже, при такому переході лагранжіан може змінюватися тільки на повну похідну за часом від якоїсь функції. Розглянемо перехід в систему координат, що рухається щодо даної з нескінченно малою постійною швидкістю $\vec{\varepsilon}$. Тоді при перетворенні Галілея $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{\varepsilon}$ для швидкості функція Лагранжа перетворюється таким чином:

$$L\left(v'^2\right) = L\left(v^2 + 2\vec{v}\vec{\varepsilon} + \varepsilon^2\right) \approx L\left(v^2 + 2\vec{v}\vec{\varepsilon}\right) \approx L\left(v^2\right) + \frac{dL}{dv^2}2\vec{\varepsilon}\vec{v} = L\left(v^2\right) + 2\vec{\varepsilon}\,\frac{dL}{dv^2}\frac{d\vec{r}}{dt}\,. \tag{3.22}$$

Останній доданок є повною похідною від часу тільки в разі, коли вираз dL / dv^2 не залежить від швидкості. Дійсно, повна похідна від функції координат і швидкості дорівнює $dW\left(\vec{r},\vec{v}\right) / dt = \partial W / \partial \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} + \partial W / \partial \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}$. У нашому випадку останній доданок відсутній і, отже,

$0=\left(\partial/\partial\vec{r}\right)(\partial W/\partial\vec{v})=\left(\partial/\partial\vec{v}\right)\left(2\vec{\varepsilon}\,dL/dv^2\right)$. Отже, величина dL/dv^2 не залежить від швидкості. Тому останній доданок є повна похідна за часом тільки в разі, коли $L=av^2$. Це можна перевірити і відмовившись від малості відносного руху інерційних швидкостей. Якщо відносна швидкість однієї системи відносно іншої дорівнює $\vec{V}$, то

$$L'=av'^2=a\left(\vec{v}+\vec{V}\right)^2=av^2+2a\vec{v}\vec{V}+a\vec{V}^2=L+2a\vec{V}\frac{d\vec{r}}{dt}+\frac{d}{dt}\left(a\vec{V}^2t\right). \qquad (3.23)$$

Останні два доданки являють собою повні похідні за часом і не змінюють рівнянь руху. Вибравши коефіцієнт a у вигляді $a=m/2$, де m можна назвати масою матеріальної точки, отримуємо функцію Лагранжа системи вільних невзаємодіючих матеріальних точок у вигляді

$$L=\sum_i\frac{m_iv_i^2}{2}. \qquad (3.24)$$

Хоча рівняння Лагранжа лінійно по функції Лагранжа L і вона визначена з точністю до постійного множника, зазвичай її визначають в зазначеному вигляді. Тобто розмірність функції Лагранжа дорівнює $\left[L\right]=г\cdot см^2/сек^2$. При цьому розмірність дії є $\left[S\right]=г\cdot см^2/сек$.

Переходячи до системи взаємодіючих матеріальних точок і до незамкнених систем, в яких на ці точки діють зовнішні сили, в функції Лагранжа (3.24) необхідно ввести доданок з потенціальною енергією взаємодії:

$$L=\sum_i\frac{m_iv_i^2}{2}-\sum_{i,j}U\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right). \qquad (3.25)$$

Це треба зробити, щоб з рівняння Лагранжа із зазначеним лагранжіаном слідували рівняння Ньютона. Нагадаємо, що при отриманні рівняння Лагранжа ми використовували принцип віртуальних переміщень і рівняння Ньютона. Так само і в даному підході, рівняння Лагранжа пов'язані з принципом мінімальності дії і рівнянням Ньютона.

У замкнутій системі матеріальних точок потенційна енергія залежить тільки від відносних відстаней між точками: $U=U\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)$. Якщо система не замкнута, то в потенційній енергії з'являються складові, що залежать від самих координат $\vec{r}_i$ і пов'язані із зовнішніми силами. Крім цього, потенційна енергія в незамкненою системі може залежати від часу. Тоді функцію Лагранжа можна записати у вигляді:

$$L = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum_{i \neq j} U\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) - \sum_i V\left(\vec{r}_i, t\right).$$

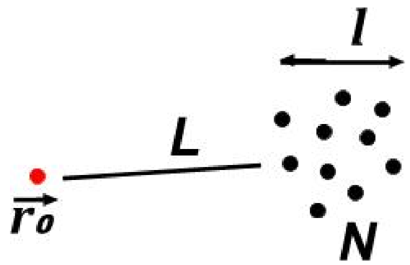


Рис.3.5. Поява залежності від часу в незамкненій системі.

Останній доданок виникає у випадку, коли в замкненій системі є тіла (позначено червоною крапкою на Рис. 3.5), рух яких майже не залежить від інших тіл, і може бути знайдений наперед. Тоді їх можна викинути із розгляду, а взаємодію інших тіл (чорні крапки) у системі з цими тілами представити у лагранжиані, як $V\left(\vec{r}_i, t\right)$.